



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, București, 8 februarie 2025

CLASA a VIII-a

### SUBIECTE

#### Problema 1

- a) Demonstrați că  $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ , pentru orice  $a, b > 0$ .
- b) Fie  $a, b, c$  numere reale strict pozitive astfel încât  $a + b + c = 2025$ . Arătați că  $\frac{a}{a+675} + \frac{b}{b+675} + \frac{c}{c+675} \leq \frac{3}{2}$ .

**Problema 2** Fie  $ABCD$  un tetraedru cu baza  $BCD$  triunghi echilateral, iar  $G_1$  și  $G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABD$ , respectiv  $ACD$ .

- a) Arătați că  $G_1G_2 \parallel (BCD)$ .
- b) Considerăm o dreaptă  $PQ$ ,  $P \in (CD)$  și  $Q \in (BC)$  ce conține centrul bazei. Arătați că  $AC \parallel (G_1PQ)$ .

*suplimentul Gazetei Matematice*

**Problema 3** Aflați numerele prime  $p$  și  $q$  cu proprietatea că numărul  $p^2 + 11pq + 25q^2$  este pătrat perfect.

**Problema 4** Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un paralelipiped dreptunghic astfel încât măsurile unghiurilor  $\sphericalangle B'AC$ ,  $\sphericalangle CAD'$ ,  $\sphericalangle B'AD'$  sunt toate mai mari sau egale cu  $60^\circ$ . Arătați că paralelipipedul este cub.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*